2° Μάθημα:

14/10/2019

ΟΜΟΓΕΝΗ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ 2 ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ:

Ομογενής: Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων από την μία κατάσταση στην άλλη δεν εξαρτάται από το χρόνο πραγματοποίησης της μετάβασης.

$$P_{ij}(n-1,n) = P_{ij}$$

Μαρκοβιανή: Το μέλλον εξαρτάται από το παρόν και όχι από το παρελθόν.

Αλυσίδα: Σ.Δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων.

2 καταστάσεις: $S = \{0, 1\}$

έχω ένα σύστημα, μια Σ.Δ. με δύο καταστάσεις την 0 και την 1

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & & \\ 1 & & \end{array} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

πίνακας πιθ. μετάβασης ενός βήματος

πιθανότητα να "πάω" σε ένα βήμα από την κατάσταση 0→0

$$P_{00} + P_{01} = 1$$

$$P_{10} + P_{11} = 1$$

Υποθέσεις: $a+b \neq 0$
$a+b \neq 2$

Αν $a+b=0$ αυτό σημαίνει $a=b=0$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (θα ξεκινάω κ' θα σταματάω με ίδιο αποτελ.)

Αν $a+b=2$ αυτό σημαίνει $a=b=1$.

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (θα πηγαίνω εναλλάξ)

Ερωτήματα:

1) Ποια η πιθανότητα τη χρονική στιγμή n η Σ.Δ. να βρίσκεται στην κατάσταση $j \in \{0,1\}$

2) Ποια η πιθανότητα τη χρονική στιγμή n η Σ.Δ. να βρίσκεται στην κατάσταση $j \in \{0,1\}$ δεδομένου ότι αρχικά η σ.δ. βρισκόταν στην κατάσταση $i \in \{0,1\}$

3) Παρόμοια με το 1°, 2° αλλά μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα j

το n-1 για το n θεωρείται παρόν και όχι παρελθόν. το n είναι το μέλλον.

1) $P(X_n=j) = P_j^{(n)}$, $j=0,1$

$P(X_n=0) = P\Big($ A_1: είτε τη χρονική στιγμή (A_{11}) n-1 ήταν στο 0 (A_{12}) και παρέμεινε είτε (A_{21}) την χρον. στιγμή n-1 ήταν στο 1 και (A_{22}) πήγε στο 0 A_2 $\Big) =$

$= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = P(A_{11} \cap A_{12}) + P(A_{21} \cap A_{22}) =$
$= P(X_{n-1} = 0) \cdot (1-a) + P(X_{n-1} = 1) \cdot b$

ΑΡΑ: $\begin{cases} P(X_n=0) = P(X_{n-1}=0)(1-a) + P(X_{n-1}=1) b \quad (*) \\ P(X_n=1) = P(X_{n-1}=0) a + P(X_{n-1}=1)(1-b) \end{cases}$

$$\underbrace{\left(P(X_n=0) \quad P(X_n=1)\right)}_{1\times 2} = \underbrace{\left(P(X_{n-1}=0) \quad P(X_{n-1}=1)\right)}_{1\times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}}_{2\times 2}$$

Συμβολίζω $P^{(n)} = \left(P(X_n=0) \; P(X_n=1)\right)$

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} \cdot P$$
$$= P^{(n-2)} \cdot P^2$$
$$= P^{(0)} \cdot P^n$$

όπου $P^{(0)} = \left(P(X_0=0) \; P(X_0=1)\right)$ οι πιθανότητες αρχικά η ε.δ. να βρίσκεται στην 0 ή 1.

Αν λ_1, λ_2 είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός 2×2 πίνακα ΤΟΤΕ:

$$P^n = Q \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \cdot Q^{-1}$$

$Q = (q_1, q_2)$ με q_i τα ιδιοδιανύσματα

Ιδιοτιμές του P:

$$\begin{vmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - a\cdot b = 0$$
$$\iff \lambda^2 + (a+b-2)\cdot\lambda + (1-a-b) = 0$$
$$\Delta = (a+b)^2 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 1-(a+b) \end{cases}$$

έχω $Q = (q_1 \quad q_2)$

$P \cdot q_i = \lambda_i \cdot q_i$

Για $i=1$: $\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (1-a) q_{11} + a \cdot q_{12} = q_{11} \\ b\, q_{11} + (1-b) q_{12} = q_{12} \end{cases} \Rightarrow \boxed{q_{12} = q_{11}}$$

Για $i=2$: $\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = (1-a-b) \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{pmatrix}$

$$(1-a) q_{21} + a \cdot q_{22} = (1-a-b) \cdot q_{21}$$
$$\Rightarrow a \cdot q_{22} = -b\, q_{21} \Rightarrow \boxed{q_{22} = -\frac{b}{a} q_{21}}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

τυχαία επιλογή που συμφέρει

$$Q^{-1} = \underbrace{\frac{-1}{a+b}}_{|Q|} \cdot \begin{bmatrix} -b & -a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα $P^n = Q \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{bmatrix} Q^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{b + a \cdot (1-a-b)^n}{a+b} \to X & Y \leftarrow \frac{a - a \cdot (1-a-b)^n}{a+b} \\ \frac{b - b \cdot (1-a-b)^n}{a+b} \to Z & W \leftarrow \frac{a + b \cdot (1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix}$$

θέλει να του το δείχνουμε όχι να το παίρναμε έτοιμο.

$\rightsquigarrow$ $n = 15$

$P(X_{15}=0)$

Αν $P(X_0 = 0) = 0.6$

άρα $P(X_0 = 1) = 0.4$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot p^{n}$$

$$\big(P(X_{15}=0),\ P(X_{15}=1)\big) = (0.6 \quad 0.4) \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$P(X_{15}=0) = 0.6x + 0.4z$$

$$P(X_{15}=1) = 0.6y + 0.4w$$

2 Μας ζητάει $P(X_n = j \mid X_0 = i) = P_{ij}^{(n)}$ $\boxed{i, j \in \{0,1\}}$

$P(X_{15}=0 / X_0=0)$ Αν έχουν ίση διαφορά, είναι

$\overset{..}{P}(X_{16}=0 \mid X_1=0)$ ίσες και οι πιθανότητες

$15-0=15$ και $16-1=15$.

$$P(X_n=0) = P\left(\begin{array}{l} \text{είτε αρχικά να είμαι στο 0} \\ \text{και ξεκινώντας από το 0 να} \\ \text{πάω μετά από } n \text{ βήματα στο 0} \\ \text{είτε αρχικά να είμαι στο 1 και} \\ \text{ξεκινώντας από το 1 να πάω σε} \\ n \text{ βήματα στο 0} \end{array}\right) =$$

B_1

B_2

$$= P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(X_0=0)\, P_{00}^{(n)} + P(X_0=1) \cdot P_{10}^{(n)}$$

$$P(X_n=1) = P(X_0=0) \cdot P_{01}^{(n)} + P(X_0=1) \cdot P_{11}^{(n)}$$

Πάλι τις δύο σχέσεις θα εις γράψω σε μία:

$$\left(P(X_n=0),\ P(X_n=1)\right) = \left(P(X_0=0),\ P(X_0=1)\right) \cdot \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{δηλ. } p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$$

Αυτός είναι ο πίνακας που έχει τις 4 πιθανότητες που θέλω να υπολογίσω.

Επομένως $\begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix} = P^n = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$

$$P_{00}^{(n)} = \frac{b + a(1-a-b)^n}{a+b}, \quad P_{10}^{(n)} = \frac{b - b(1-a-b)^n}{a+b}$$

Για να αποδ. το ερώτημα 2° πρέπει να αποδ. το 1° ερώτημα!!

(3) Θέλουμε να βρούμε $\lim_{n\to\infty} P_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$

Παρατήρηση: Όπως θα δούμε σε επόμενο μάθημα, οι παραπάνω οριακές πιθανότητες υπάρχουν ___ καθώς η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων και επιπλέον είναι μη διαχωρίσιμη.

$$\Pi_0 = \lim_{n\to\infty} P_0^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{i0}^{(n)}$$

$$\Pi_1 = \lim_{n\to\infty} P_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{i1}^{(n)}, \quad \Pi_0 + \Pi_1 = 1$$

1ος τρόπος:

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} \cdot P$$

$$(p_0^{(n)}\ p_1^{(n)}) = (p_0^{(n-1)}, p_1^{(n-1)})\ P$$

Παίρνω όριο για $n \to \infty$

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \cdot P$$

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \cdot \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \cdot (1-a) + \pi_1 \cdot b \\ \pi_1 = \pi_0 \cdot a + \pi_1 (1-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 \cdot a = \pi_1 \cdot b \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

άρα $\pi_0 = \dfrac{b}{a+b}$, $\pi_1 = \dfrac{a}{a+b}$

2ος τρόπος:

$$\pi_0 = \lim_{n \to \infty} p_{00}^{(n)} = \lim p_{10}^{(n)} = \frac{b}{a+b}$$

$$\pi_1 = 1 - \pi_0 = \frac{a}{a+b}$$

Στεγνή : 0
Βροχερή : 1

Σελίδα 33 Άσκηση 3.2.3.

Σε μια μελέτη βροχοπτώσεων στο Tel Aviv κάποιοι μετεωρολόγοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η εναλλαγή των βροχερών κ' των στεγνών ημερών μπορεί να παρασταθεί επαρκώς από μια ομογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα 2 καταστάσεων. Ο παρακάτω πίνακας δίνει μετρήσεις 2.437 ημερών.

i. Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης δηλ. ο P

ii. Να βρεθούν οι πιθ. $P_{ij}^{(n)}$ $\forall$ i,j και n.

iii. Αν η σημερινή μέρα είναι στεγνή μετά από πόσες μέρες αναμένεται να βρέξει?

	Επόμενη	
Προηγ.	στεγνή	βροχερή
Στεγνή	1049	350
Βροχερή	351	687

μέση τιμή ← αναμένεται

Λύση:

i.

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & p_{00} & p_{01} \\ 1 & p_{10} & p_{11} \end{array} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1049}{1049+350} & \frac{350}{1049+350} \\ \frac{351}{351+687} & \frac{687}{351+687} \end{bmatrix}$$

ii. Αποδ. $1^{\alpha\varsigma}$ και $2^{\alpha\varsigma}$ ερωτήσεις.

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

iii. Έστω T η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό ημερών μέχρι την $1^{η}$ βροχή.
Δυνατές τιμές της T: $1, 2, 3, \ldots$

$$P(T=1) = P(\text{στεγνή} \to \text{βροχή}) = p_{01}$$
$$P(T=2) = P(\text{στεγνή} \to \text{στεγνή} \to \text{βροχή}) = p_{00} \cdot p_{01}$$
$$\vdots$$
$$P(T=k) = p_{00}^{k-1} \cdot p_{01}$$

Είναι γεωμετρική κατανομή $Geo(p_{01})$
και $E(T) = \frac{1}{p_{01}}$

αλλά έστω ότι δεν ήξερα ότι είναι γεωμετρική.

$$E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_{00}^{\,k-1} \cdot P_{01} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n} = (1-x)^{-1}$$ --> Δίνεται στις εξετάσεις.

εδώ!! $\sum n \cdot x^{n-1} = (1-x)^{-2}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_{00}^{\,k-1} P_{01}$$ ... προκύπτει $E(T) = \dfrac{1}{P_{01}}$